

MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 4

1. Spočítejte limity (nebo ukažte, že daná posloupnost limitu nemá):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}, \quad a > 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sin n}{n + \cos n}.$$

2. Ukažte, že posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, nemá limitu.

3. Zkuste spočítat i užitím věty o limitě sevřené funkce $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$

4. Vyšetření konvergence rekurentně definované posloupnosti:

$$\text{Definujme rekurentně posloupnost } (a_n), \text{ kde } a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right).$$

$$\text{Ukažte, že } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}.$$

(Návod: ukažte, že daná posloupnost je klesající, zdola omezená)

Dobrovolně:

5. Promyslete a pokuste se dokázat a podrobně důkaz napsat:

a) Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a$, $a < 1$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(analogicky k tvrzení ze cvičení: je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$, $a < 1$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$);

b) Je-li $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, $a > 1$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

c) Je-li $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, $a > 1$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

6. A ukažte si, jak snadno se pomocí tvrzení z příkladu 5 dokáže, že:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n!} = 0$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ ($a > 1$)

(„základní“ limity, je „dobré“ je znát).

A nakonec trošku o nekonečných řadách (opět dobrovolně):

1. Pokuste se sečíst řadu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-3n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ (Rada: rozložte zlomek $\frac{1}{4n^2 - 1}$ na rozdíl dvou zlomků).

2. Ukažte, že divergují řady (užitím nutné podmínky konvergence řad):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3} \right)^2; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$